

© А.Г. ОБУХОВ¹, Л.В. АБДУБАКОВА²

¹Тюменский государственный нефтегазовый университет

²Тюменский государственный университет

aobukhov@tsogu.ru, ablili@mail.ru

УДК 519.63+533.6

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТРЕХМЕРНОГО ВОСХОДЯЩЕГО ЗАКРУЧЕННОГО ПОТОКА ГАЗА*

NUMERICAL CALCULATION OF THERMODYNAMIC CHARACTERISTICS OF THE THREE-DIMENSIONAL ASCENDANT SWIRLING GAS FLOW

АННОТАЦИЯ. С использованием явной разностной схемы в прямоугольном параллелепипеде численно строятся решения полной системы уравнений Навье-Стокса. Такие решения описывают трехмерные течения сжимаемого вязкого теплопроводного газа в восходящих закрученных потоках в условиях действия сил тяжести и Кориолиса при постоянных коэффициентах вязкости и теплопроводности. Начальные условия представляют собой функции, являющиеся точным аналитическим решением полной системы уравнений Навье-Стокса. Предложены конкретные краевые условия, при которых восходящий поток газа моделируется продувом через квадратное отверстие в верхней плоскости расчетной области. Приведены результаты расчетов термодинамических параметров возникающего восходящего закрученного потока. Показано, что плотность, температура и давление газа при таком сложном течении претерпевают заметные изменения на начальной стадии. При увеличении времени расчета термодинамические параметры и все течение в целом стабилизируются с постепенным выходом на стационарный режим.

SUMMARY. The solutions of the complete system of Navier-Stokes equations using an explicit difference scheme in a rectangular parallelepiped are constructed numerically. These solutions describe the three-dimensional flows of the coercible viscous heat-conducting gas in ascendant swirling flows under gravity and Coriolis with constant coefficients of viscosity and thermal conductivity. The initial conditions are the functions that are the exact analytical solution of the complete system of Navier-Stokes equations. It is proposed the specific boundary conditions under which an ascendant gas flow is simulated by blowing through a square hole in the upper surface of the computational domain. The calculation results of thermodynamic parameters of the ascendant swirling

* Исследования выполнены при поддержке РФФИ (проект № 11-01-00198) и Министерства образования и науки РФ (проект № 1.8490.2013).

flow are given. It is shown that the density, temperature and gas pressure under such complex current change prominently at the initial stage. With an increasing calculation time, the thermodynamic parameters and the whole current are stabilizing gradually reaching a steady state.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Система уравнений газовой динамики, полная система уравнений Навье-Стокса, краевые условия.

KEY WORDS. The system of equations of gas dynamics, complete system of Navier-Stokes equations, boundary conditions.

Введение. Для описания сложных течений газа в свободных восходящих закрученных потоках используются модели упругой сплошной среды, основанные на численном решении полной системы уравнений Навье-Стокса [1]. Такие решения наиболее адекватно описывают физические процессы в указанных течениях, поскольку в них учитываются диссипативные свойства упругой сплошной среды — вязкости и теплопроводности.

Теоретические и численные исследования, проведенные в работах [2-6], подтвердили предложенную в [7] общую схему возникновения и последующего функционирования восходящего закрученного потока. В указанных работах были изучены течения газа в разных частях восходящего закрученного потока. Основная идея предложенной в [7] схемы возникновения восходящего закрученного потока заключается в том, что в результате локального прогрева поверхности суши или водной поверхности появляется восходящий поток воздуха. Замещающее его радиальное течение под действием силы инерции Кориолиса приобретает осевую закрутку.

В работах [8-10] предложенная схема получила экспериментальное подтверждение. В этих работах свободный вихрь инициировался нагревом металлической круглой плиты газовой горелкой. Принципиально важно при этом отметить, что для появления радиального движения воздуха не имеет значения способ создания первоначального восходящего потока — либо нагрев подстилающей поверхности, либо холодный вертикальный продув. Последний способ получения восходящего закрученного потока был успешно реализован в лабораторных условиях [11], [12]. Поэтому было бы весьма интересно попытаться математически и численно смоделировать возникновение и развитие восходящего закрученного потока именно с использованием холодного продува воздуха. Тем более что в работах [13-15] предприняты попытки исследований сложных течений газа, предполагающих математическое моделирование и численные расчеты трехмерных нестационарных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа в целом.

Целью данной работы является численный расчет термодинамических характеристик трехмерного нестационарного течения сжимаемого вязкого теплопроводного газа в восходящем закрученном потоке, вызванного вертикальным холодным продувом.

Полная система уравнений Навье-Стокса. Для описания сложных течений упругой сплошной среды, обладающей диссипативными свойствами вязкости и теплопроводности, используется полная система уравнений Навье-Стокса, которая, будучи записанной в безразмерных переменных с учетом действия силы тяжести и Кориолиса в векторной форме, имеет следующий вид [16]:

$$\begin{cases} \rho_t + \vec{V} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0, \\ \vec{V}_t + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + \frac{T}{\gamma \rho} \nabla \rho + \frac{1}{\gamma} \nabla T = \vec{g} - 2\vec{\Omega} \times \vec{V} + \frac{\mu_0}{\rho} \left[\frac{1}{4} \nabla (\operatorname{div} \vec{V}) + \frac{3}{4} \Delta \vec{V} \right], \\ T_t + \vec{V} \cdot \nabla T + (\gamma - 1) T \operatorname{div} \vec{V} = \frac{\kappa_0}{\rho} \Delta T + \frac{\mu_0 \gamma (\gamma - 1)}{2\rho} \left\{ [(u_x - v_y)^2 + \right. \\ \left. + (u_x - w_z)^2 + (v_y - w_z)^2] + \frac{3}{2} [(u_y + v_x)^2 + (u_z + w_x)^2 + (v_z + w_y)^2] \right\}, \end{cases} \quad (1)$$

где значения безразмерных коэффициентов вязкости и теплопроводности следующие: $\mu = 0.001$, $\kappa_0 = 1.458333\mu_0$.

Эта система в дифференциальной форме передает законы сохранения массы, импульса и энергии в движущейся сплошной среде.

В системе (1): t — время; x, y, z — декартовы координаты; ρ — плотность газа; $\vec{V} = (u, v, w)$ — вектор скорости газа с проекциями на соответствующие декартовы оси; T — температура газа; $\vec{g} = (0, 0, -g)$ — вектор ускорения силы тяжести; $\gamma = 1.4$ — показатель политропы для воздуха; $-2\vec{\Omega} \times \vec{V} = (av - bw, -au, bu)$ — вектор ускорения силы Кориолиса, где $a = 2\Omega \sin \psi$, $b = 2\Omega \cos \psi$, $\Omega = |\vec{\Omega}|$; $\vec{\Omega}$ — вектор угловой скорости вращения Земли; ψ — широта точки O — начала декартовой системы координат $xyzO$, вращающейся вместе с Землей; ∇ и div — операторы градиента и дивергенции по декартовым пространственным переменным, точкой обозначено скалярное произведение векторов.

Система (1) имеет смешанный тип: первое уравнение образует гиперболическую часть системы, так как определяет в течениях сжимаемого теплопроводного вязкого газа наличие слабого разрыва на контактной поверхности; второе и третье уравнения составляют параболическую часть системы, так как содержат вторые производные скорости и температуры по пространственной переменной.

Начальные и граничные условия. В качестве начальных условий при описании соответствующих течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа в случае постоянных значений коэффициентов вязкости и теплопроводности в данной работе берутся функции, задающие точное решение [13] системы (1):

$$u = 0, v = 0, w = 0, T_0(z) = 1 - kz, k = \frac{l x_{00}}{T_{00}}, l = 0.0065 \frac{K}{M}, x_{00} = 10^5 \text{ м}, T_{00} = 288^\circ \text{ К} \quad (2)$$

$$\text{и } \rho_0(z) = (1 - kz)^{\nu-1}, \quad \nu = \frac{\gamma g}{k} = \text{const} > 0. \quad (3)$$

Расчетная область представляет собой прямоугольный параллелепипед с длинами сторон $x^0 = 1$, $y^0 = 1$ и $z^0 = 0.02$ вдоль осей Ox , Oy и Oz соответственно.

Для плотности на всех шести гранях параллелепипеда: $x = 0$, $x = x^0$, $y = 0$, $y = y^0$, $z = 0$, $z = z^0$ — ставится «условие непрерывности» потока, которое означает, что значения искомой функции на границу области сносятся линейной интерполяцией по нормали к данной граничной поверхности из внутренней части расчетной области [14].

Краевые условия для компонент вектора скорости газа берутся соответствующими «условиям непротекания» для нормальной составляющей вектора

скорости и «условиям симметрии» для двух других компонент вектора скорости течения [14]. Для температуры на всех шести гранях задаются условия теплоизоляции [14].

Кроме того, учитывая цель данной работы, через квадратное отверстие размером 0.1×0.1 в центре верхней грани расчетной области задается вертикальная скорость течения газа в зависимости от времени t в виде:

$$w(t) = 0.0125 \cdot [1 - \exp(-10t)]. \quad (4)$$

Тем самым через верхнее отверстие моделируется вертикальный плавный продув газа в диапазоне скоростей $0 \div 0.0125$.

Расчетная область заполняется трехмерной сеткой узлов пересечения трех семейств плоскостей $x = x_i$, $y = y_j$, $z = z_k$, где $x_i = i \cdot \Delta x$, $y_j = j \cdot \Delta y$, $z_k = k \cdot \Delta z$, $0 \leq i \leq L$, $0 \leq j \leq M$, $0 \leq k \leq N$. Разностные шаги по трем пространственным переменным $\Delta x = x^0 / L$, $\Delta y = y^0 / M$, $\Delta z = z^0 / N$.

По известным в начальный момент времени $t = 0$ во всех точках прямоугольного параллелепипеда всем искомым функциям

$$\vec{U} \Big|_{t=0} = \vec{U}^0 \quad (5)$$

с помощью явной разностной схемы

$$\vec{U}^{n+1} = \vec{U}^n + \Delta t \cdot F(\vec{U}^n); \quad \vec{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ w \\ T \end{pmatrix} \quad (6)$$

вычисляются значения искоемых функций во внутренних точках прямоугольного параллелепипеда. После этого, используя граничные условия, значения искоемых функций определяются во всех точках граней, ребер и вершин расчетной области.

Результаты расчетов. Расчеты проводились при следующих входных параметрах: масштабные размерные значения плотности, скорости, расстояния и времени равны соответственно $\rho_{00} = 1.2928 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $u_{00} = 333 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, $x_{00} = 50000 \text{ м}$, $t_{00} = x_{00} / u_{00} = 150.15 \text{ с}$.

Разностные шаги по трем пространственным переменным $\Delta x = \Delta y = 0.005$ (размерное значение 250 м), $\Delta z = 0.002$ (размерное значение 100 м), а шаг по времени $\Delta t = 0.001$ (размерное значение 0.15 с).

На рис. 1-4 представлены результаты расчетов плотности газа на высоте $z = 0.01$ (размерное значение 500 м) для четырех различных моментов расчетного времени. Плотность газа по периметру расчетной области сохраняется постоянной и равной значению плотности стационарного распределения. В начальные моменты времени происходят колебания плотности газа в третьем десятичном знаке, а с течением времени амплитуда колебаний плотности постепенно уменьшается и наблюдается плавное понижение плотности в центре расчетной области.

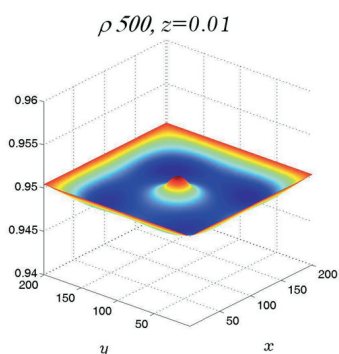


Рис. 1. Плотность газа на 500 расчетном шаге по времени

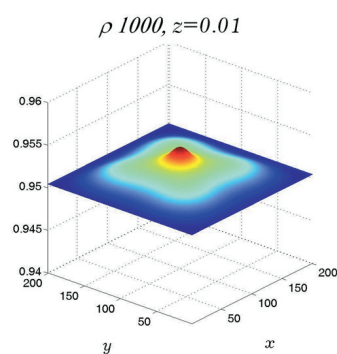


Рис. 2. Плотность газа на 1000 расчетном шаге по времени

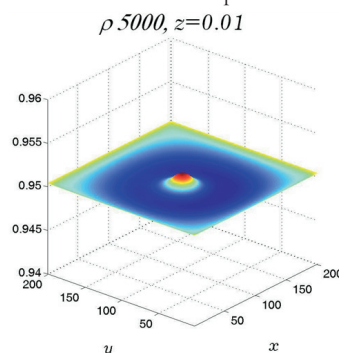


Рис. 3. Плотность газа на 5000 расчетном шаге по времени

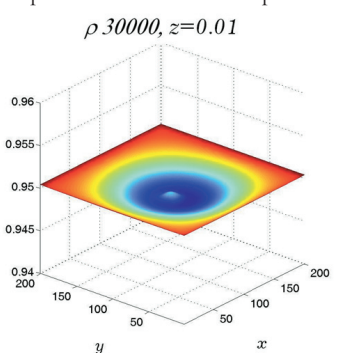


Рис. 4. Плотность газа на 30000 расчетном шаге по времени

На рис. 5-8 приведены результаты расчетов температуры газа на высоте $z = 0.01$ (размерное значение 500 м) для четырех различных моментов расчетного времени. Несмотря на холодный продув газа через верхнее отверстие, в результате численного решения полной системы уравнений Навье-Стокса отмечается понижение температуры в центре расчетной области под отверстием продува. Общее же значение температуры соответствует постоянному значению начального стационарного распределения. Следует отметить, что так же, как и для плотности, видны незначительные изменения температуры в начальные моменты времени счета, которые постепенно исчезают.

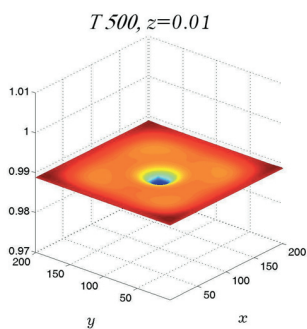


Рис. 5. Температура газа на 500 расчетном шаге по времени

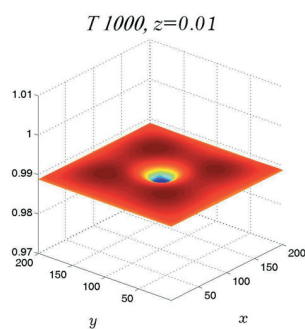


Рис. 6. Температура газа на 1000 расчетном шаге по времени

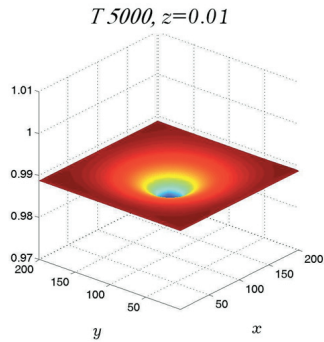


Рис. 7. Температура газа на 5000 расчетном шаге по времени

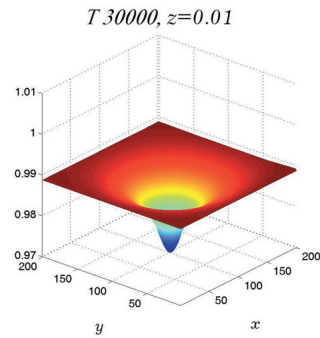


Рис. 8. Температура газа на 30000 расчетном шаге по времени

На рис. 9-12 изображены результаты расчетов давления газа на высоте $z = 0.01$ (размерное значение 500 м) для четырех различных моментов расчетного времени. Поведение рассчитанных значений давления с течением времени аналогично поведению плотности и температуры, поскольку давление есть произведение плотности и температуры. Существенным моментом в поведении давления от времени является появление области пониженных значений, напоминающей воронку, которая постепенно увеличивается с течением времени.

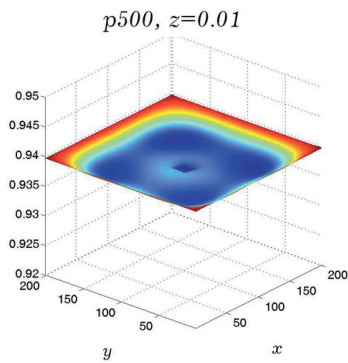


Рис. 9. Давление газа на 500 расчетном шаге по времени

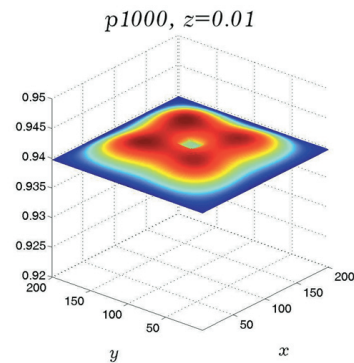


Рис. 10. Давление газа на 1000 расчетном шаге по времени

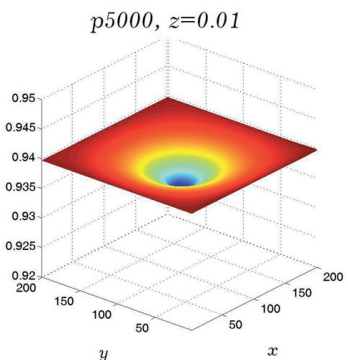


Рис. 11. Давление газа на 5000 расчетном шаге по времени

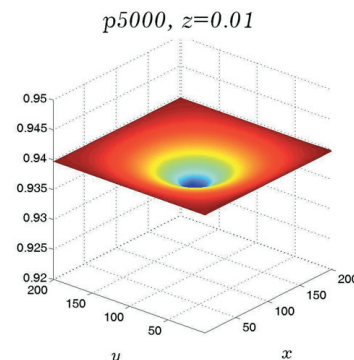


Рис. 12. Давление газа на 30000 расчетном шаге по времени

Таким образом, в работе показано, что численное решение полной системы уравнений Навье-Стокса с поставленными начально-краевыми условиями могут описывать сложные течения вязкого сжимаемого теплопроводного газа. Установлено, что плотность, температура и давление газа при таком сложном течении претерпевают заметные изменения на начальной стадии. При увеличении времени расчета термодинамические параметры и все течение в целом стабилизируются с постепенным выходом на стационарный режим.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баутин С.П. Представление решений системы уравнений Навье-Стокса в окрестности контактной характеристики // Прикладная математика и механика. 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 574-584.
2. Баутин С.П., Обухов А.Г. Математическое моделирование разрушительных атмосферных вихрей. Новосибирск: Наука, 2012. 152 с.
3. Баутин С.П., Обухов А.Г. Математическое моделирование и численный расчет течений в придонной части тропического циклона // Вестник Тюменского государственного университета. 2012. № 4. Серия «Физико-математические науки. Информатика». С. 175-183.
4. Обухов А.Г. Математическое моделирование и численные расчеты течений в придонной части торнадо // Вестник Тюменского государственного университета. 2012. № 4. Серия «Физико-математические науки. Информатика». С. 183-189.
5. Баутин С.П., Обухов А.Г. Математическое моделирование придонной части восходящего закрученного потока // Теплофизика высоких температур. 2013. Т. 51. № 4. С. 567-570.
6. Баутин С.П., Крутова И.Ю., Обухов А.Г., Баутин К.В. Разрушительные атмосферные вихри: теоремы, расчеты, эксперименты. Новосибирск: Наука; Екатеринбург: Изд-во УрГУПС, 2013. 215 с.
7. Баутин С.П. Торнадо и сила Кориолиса. Новосибирск: Наука, 2008. 96 с.
8. Вараксин А.Ю., Ромаш М.Э., Копейцев В.Н., Горбачев М.А. Моделирование свободных тепловых вихрей: генерация, устойчивость, управление // Теплофизика высоких температур. 2010. Т. 48, № 6. С. 965-972.
9. Вараксин А.Ю., Ромаш М.Э., Копейцев В.Н., Горбачев М.А. Физическое моделирование воздушных смерчей: некоторые безразмерные параметры // Теплофизика высоких температур. 2011. Т. 49. № 2. С. 317-320.
10. Вараксин А.Ю., Ромаш М.Э., Копейцев В.Н. Торнадо. М.: Физматлит, 2011. 312 с.
11. Баутин С.П., Баутин К.В., Макаров В.Н. Экспериментальное подтверждение возможности создания потока воздуха, закрученного силой Кориолиса // Вестник УрГУПС. 2013. № 2(18). С. 27-33.
12. Макаров В.Н., Горбунов С.А., Баутин К.В., Баутин С.П. Исследование циркуляционного течения атмосферного воздуха под действием силы Кориолиса // Известия Уральского государственного горного университета. 2013. № 2(30). С. 35-38.
13. Баутин С.П., Обухов А.Г. Одно точное стационарное решение системы уравнений газовой динамики // Известия вузов. Нефть и газ. 2013. № 4. С. 81-86.
14. Баутин С.П., Обухов А.Г. Об одном виде краевых условий при расчете трехмерных нестационарных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа // Известия вузов. Нефть и газ. 2013. № 5. С. 55-63.
15. Обухов А.Г., Сорокина Е.М. Математическое моделирование и численный расчет трехмерного конвективного течения газа // Известия вузов. Нефть и газ. 2013. № 6. С. 57-63.
16. Баутин С.П. Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 2009. 368 с.

REFERENCES

1. Bautin, S.P. Presentation of the solutions to Navier-Stokes equations in the neighborhood of the contact data. *Prikladnaia matematika i mekhanika — Applied Mathematics and Mechanics*. 1987. V. 51. № 4. Pp. 574-584. (in Russian).
2. Bautin, S.P., Obukhov, A.G. *Matematicheskoe modelirovanie razrushitel'nykh atmosferykh vikhrei* [Mathematical modeling of destructive atmospheric vortices]. Novosibirsk: Nauka, 2012. 152 p. (in Russian).
3. Bautin, S.P., Obukhov, A.G. Mathematical modeling and numerical simulation of flows in the bottom part of the tropical cyclone. *Vestnik Tiimenskogo gosudarstvennogo universiteta — Tyumen State University Herald*. 2012. № 4. Series «Physical and mathematical sciences. Computer science». Pp. 175-183. (in Russian).
4. Obukhov, A.G. Mathematical modeling and numerical calculations of the currents in the bottom part of the tornado. *Vestnik Tiimenskogo gosudarstvennogo universiteta — Tyumen State University Herald*. 2012. № 4. Series «Physical and mathematical sciences. Computer science». Pp. 183-189. (in Russian).
5. Bautin, S.P., Obukhov, A.G. Mathematical modeling of the bottom part of the ascendant swirling flow. *Teplofizika vysokikh temperatur — Thermo physics of high temperatures*. 2013. V. 51. № 4. Pp. 567-570. (in Russian).
6. Bautin, S.P., Krutova, I.Iu., Obukhov, A.G., Bautin, K.V. *Razrushitel'nye atmosferye vikhri: teoremy, raschety, eksperimenty* [Destructive atmospheric vortices: Theorem, calculations, experiments]. Novosibirsk: Nauka; Ekaterinburg, 2013. 215 p. (in Russian).
7. Bautin, S.P. *Tornado i sila Koriolisa* [Tornado and the Coriolis force]. Novosibirsk: Nauka, 2008. 96 p. (in Russian).
8. Varaksin, A.Iu., Romash, M.E., Kopeitsev, V.N., Gorbachev, M.A. Thermal modeling of free vortex generation, stability, control. *Teplofizika vysokikh temperatur — Thermo physics of high temperatures*. 2010. V. 48. № 6. Pp. 965-972. (in Russian).
9. Varaksin, A.Iu., Romash, M.E., Kopeitsev, V.N., Gorbachev, M.A. Physical modeling of air tornadoes: some dimensionless parameters. *Teplofizika vysokikh temperatur — Thermo physics of high temperatures*. 2011. V. 49. № 2. Pp. 317-320. (in Russian).
10. Varaksin, A.Iu., Romash, M.E., Kopeitsev, V.N. *Tornado* [Tornado]. Moscow, 2011. 312 p. (in Russian).
11. Bautin, S.P., Bautin, K.V., Makarov, V.N. Experimental confirmation of the possibility to create an air flow swirled by Coriolis force. *Vestnik UrGUPS — USURT Herald*. 2013. № 2(18). Pp. 27-33. (in Russian).
12. Makarov, V.N., Gorbunov, S.A., Bautin, K.V., Bautin, S.P. Study of recirculating air flow under the influence of Coriolis force. *Izvestiia Ural'skogo gosudarstvennogo gornogo universiteta — Proceedings of the Ural State Mining University*. 2013. № 2 (30). Pp. 35-38. (in Russian).
13. Bautin, S.P., Obukhov, A.G. One exact stationary solution of the equations of gas dynamics. *Izvestiia vuzov. Neft' i gaz — Proceedings of higher education institutions. Oil and gas*. 2013. № 4. Pp. 81-86. (in Russian).
14. Bautin, S.P., Obukhov, A.G. A form of the boundary conditions in the calculation of three-dimensional unsteady compressible viscous heat-conducting gas. *Izvestiia vuzov. Neft' i gaz — Proceedings of higher education institutions. Oil and gas*. 2013. № 5. Pp. 55-63. (in Russian).
15. Obukhov, A.G., Sorokina, E.M. Mathematical modeling and numerical simulation of three-dimensional convective flow of gas. *Izvestiia vuzov. Neft' i gaz — Proceedings of higher education institutions. Oil and gas*. 2013. № 6. Pp. 57-63. (in Russian).
16. Bautin, S.P. *Kharakteristicheskaia zadacha Koshi i ee prilozheniia v gazovoi dinamike* [Characteristic Cauchy problem and its applications in gas dynamics]. Novosibirsk: Nauka, 2009. 368 p. (in Russian).

Авторы публикации

Обухов Александр Геннадьевич — профессор кафедры высшей математики Тюменского государственного нефтегазового университета, доктор физико-математических наук

Абдубакова Лилия Варисовна — старший преподаватель кафедры алгебры и математической логики Института математики и компьютерных наук Тюменского государственного университета

Authors of the publication

Alexander G. Obukhov — Dr. Sci. (Physic.-Math.), Professor, Department of Higher Mathematics, Tyumen State Oil and Gas University

Liliya V. Abdubakova — Senior Lecturer, Department of Algebra and Mathematical Logic, Tyumen State University